

$$(27) ((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \wedge ((q \rightarrow p) \vee (q \rightarrow r)))$$

$$(28) ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (t \rightarrow u)) \rightarrow ((p \wedge r \wedge t) \rightarrow (q \wedge s \wedge u))$$

$$(29) ((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$$

1.11 用等值演算法证明下面的等值式。

$$(1) (\neg p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$$

$$(2) (p \wedge q) \vee \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p$$

1.12 证明: 如果  $\Psi$  是重言式, 则公式  $\Psi_1 \rightarrow (\Psi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\Psi_n \rightarrow \Psi) \dots)$  是重言式。

1.13 证明: 如果  $\Psi$  是重言式, 则公式  $\neg \Psi \rightarrow (\Psi_1 \rightarrow (\Psi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\Psi_{n-1} \rightarrow \Psi_n) \dots))$  也是重言式。

1.14 考虑形如  $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{((p \rightarrow p) \rightarrow p)}_{n \uparrow p} \rightarrow p)}_{n \uparrow p} \rightarrow p}_{n \uparrow p} \rightarrow p$  的表达式, 问对怎样的  $n$ , 此式是重言式?

1.15 证明: 如果一表达式中仅含联结词  $\leftrightarrow$ , 则将此式中括号作位置变动所得的式子与原式等价。

1.16 证明: 仅由命题变元通过联结词  $\leftrightarrow$  构造的公式是重言式, 当且仅当每个变元在其中出现偶数次。

1.17 证明: 如果蕴涵式  $p_1 \rightarrow q_1, q_2, \dots, p_n \rightarrow q_n$  为真, 同时, 命题  $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n)$  和  $\neg(q_i \wedge q_j)$  也为真 ( $i \neq j$ ), 则蕴涵式  $q_1 \rightarrow p_1, q_2 \rightarrow p_2, \dots, q_n \rightarrow p_n$  也为真。

1.18 先给出公式表长度的归纳定义。

命题变元的长为 1, 如  $lh\varphi = a, lh\psi = b$ , 则

$$lh(\varphi \wedge \psi) = lh(\varphi \vee \psi) = lh(\varphi \rightarrow \psi) = a + b + 1, \quad lh(\neg \varphi) = lh\varphi + 1$$

对于下面给出的公式, 求与之等价的最短公式。

$$(1) (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee (p \wedge r \rightarrow q)$$

$$(2) \neg p \wedge \neg \neg q$$

$$(3) (p \wedge q) \vee (\neg p \rightarrow q)$$

$$(4) (p \wedge r \wedge s \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (r \wedge s)$$

1.19 写出一个命题公式, 当 3 个命题变元  $p, q, r$  中有且仅有两个为真时, 该命题公式为真。

1.20 设  $A, B, C$  为任意的命题公式。

(1) 已知  $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$ , 问:  $A \Leftrightarrow B$  一定成立吗?

(2) 已知  $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$ , 问:  $A \Leftrightarrow B$  一定成立吗?

(3) 已知  $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ , 问:  $A \Leftrightarrow B$  一定成立吗?

1.21 求  $\neg P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \vee Q) \wedge \neg R$  的对偶式。

1.22 给定某公式  $A$  的对偶式  $A^*$  的真值表如表 1.16 所示, 求该公式  $A$  的主析取范式。

表 1.16  $A^*$  的真值表

$p$	$q$	$A^*$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F