

辛钦大数定律 假设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是独立同分布的随机变量序列, 并且数学期望 $E\xi_i = a (i = 1, 2, 3, \dots)$, 且 a 是有限的, 那么对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

上式也可表示为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \stackrel{P}{\rightarrow} a$ 或 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{P} a (n \rightarrow \infty)$, 并且称 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ 依概率收敛于 a 。

泊松大数定律 假设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是一组随机变量序列, 且两两相互独立, 并且有 $P(\xi_n = 1) = p^n, P(\xi_n = 0) = q^n$, 其中 p, q 满足条件: $p^n + q^n = 1$, 那么就称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 服从泊松大数定律。

其实从某种程度上来讲, 泊松大数定律可以认为是伯努利大数定律的延伸与普及。伯努利大数定律以严谨的数学公式说明了现实中经常出现的现象, 即当大量重复某一实验时, 最后实验的频率无限接近实验的概率。但泊松大数定律说明的是, 独立进行的随机试验的频率依旧具有其平稳性, 即使实验条件发生变化。这就是泊松大数定律比伯努利大数定律更为宽泛的地方。

马尔可夫大数定律 对于随机变量序列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 若有 $\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

2. 常见的中心极限定理

列维-林德伯格中心极限定理 假设随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是一系列独立同分布的随机变量, 其数学期望 $E\xi_k = a$ 和方差 $D\xi_k = \sigma^2 (\sigma^2 > 0; k = 1, 2, \dots)$, 则对于任意实数 x , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

列维-林德伯格中心极限定理又称为独立同分布的中心极限定理, 从这个定理可以看出正态分布

在概率论中的特殊地位, 不管 ξ_k 呈何种分布, 只要 $n \rightarrow \infty$, 就有随机变量 $\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ 。

或者说, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对于一系列随机变量 ξ_k , 只要满足独立同分布, $\sum_{k=1}^n \xi_k$ 就近似地服从正态分布 $N(n\mu, n\sigma^2)$ 。

拉普拉斯中心极限定理 假设随机变量 X_n 服从二项分布 $B(n, p)$, 那么对于任意有界区间